Tentamen Variatierekening en Optimale Besturingstheorie, 2013-14

Datum	:	27-01-2014
Plaats	:	5419.0119
Tijd	:	14.00 - 17.00

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw het scalaire systeem en kostencriterium

$$\dot{x} = u,\ x(0) = x_0, \quad J(x_0, u) = \int_0^3 u^2(t)dt + \int_3^\infty [4x^2(t) + u^2(t)]dt \tag{1}$$

   (a) Beschouw eerst het optimale besturingsprobleem voor het kostencriterium

   $$J(x_3, u) = \int_3^\infty [4x^2(t) + u^2(t)]dt$$

   voor begintoestand $x(3) = x_3$. Toon aan dat de minimale kosten voor dit probleem gelijk zijn aan $2x_3^2$, en bepaal de optimale ingangsfunctie op het tijdsinterval $[3, \infty)$.

   (b) Beschouw vervolgens het optimale besturingsprobleem voor het kostencriterium

   $$J(x_0, u) = \int_0^3 u^2(t)dt + 2x^2(3)$$

   Leidt de bijbehorende Riccati differentiaalvergelijking af, en los deze op. Wat is de optimale ingangsfunctie op het tijdsinterval $[0, 3]$?

   (c) Bepaal met behulp van het Principe van Optimaliteit (geef de expliciete argumentatie !) de optimale ingangsfunctie voor het oorspronkelijke optimale besturingsprobleem (1) op het hele tijdsinterval $[0, \infty)$. Wat zijn de minimale kosten als functie van x_0?

   (d) Toon aan dat onder invloed van de optimale ingangsfunctie als berekend in het vorige onderdeel het evenwichtspunt $x = 0$ asymptotisch stabiel is.

2. Beschouw het scalaire systeem

$$\dot{x} = ax - u, \quad x(0) = x_0, \quad |u(t)| \leq M$$

voor een constante a en een positieve constante M. Het optimale besturingsprobleem is om het kostencriterium

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt + x(1)$$

te minimaliseren als functie van $u(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal de Hamiltoniaan voor dit optimale besturingsprobleem, en de differentiaalvergelijking plus randvoorwaarden voor de co-toestand p.

   (b) Wat is de optimale ingangsfunctie $u^*(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ voor het geval $M = \infty$?

(c) Wat is de optimale besturingsfunctie voor eindige M, afhankelijk van de waarden van M en a ? Onderscheid hierbij tussen het geval $a \leq 0$ en $a > 0$.

3. (a) Beschouw de volgende modificatie van het standaardprobleem in de variatierekening: minimaliseer de integraal

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t)dt + P(x(0))$$

(voor een zekere functie P) over alle functies $x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ die voldoen aan de randvoorwaarde

$$x(T) = x_T$$

Wat worden de randvoorwaarden voor de Eulervergelijking in dit geval ?

(b) Nog een modificatie van het standaardprobleem in de variatierekening is de volgende: Minimaliseer de integraal

$$J(x(\cdot)) = \int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t)dt + P(x(0)) + S(x(T))$$

over alle functies $x(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$. Wat worden de randvoorwaarden voor de Eulervergelijking nu ?

4. Beschouw het volgende niet-lineaire systeem in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -y - x^3 \end{aligned}$$

(a) Laat door linearisatie zien dat $(0,0)$ voor $u = 0$ een asymptotisch stabiel evenwichtspunt is.

(b) Bewijs dat de terugkoppeling $u = yx^2$ ervoor zorgt dat $(0,0)$ een *globaal* asymptotisch stabiel evenwichtspunt is voor het teruggekoppelde systeem. (Aanwijzing: construeer een Lyapunovfunctie.)

(c) Beschouw het gemodificeerde systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -x^3 \end{aligned}$$

Laat zien dat $(0,0)$ voor $u = 0$ *geen* asymptotisch stabiel evenwichtspunt is. Beschouw weer de terugkoppeling $u = yx^2$. Bewijs met de tweede methode van Lyapunov dat alle oplossingen van het teruggekoppelde systeem convergeren naar de verzameling $\{(x, y) \mid x = 0\}$. Bestaat er een terugkoppeling die $(0,0)$ asymptotisch stabiel maakt ?

Puntenverdeling: Totaal 100, Gratis 10

1. a: 5, b: 5, c: 10, d: 5.
2. a: 5, b: 5, c: 10.
3. a: 10, b: 10.
4. a: 5, b: 5, c: 15.